También, como los puntos (6, 2) y (8, 0) están sobre la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (1). Por tanto, tenemos las dos ecuaciones

$$(6 - h)^2 + (2 - k)^2 = r^2, \qquad (4)$$

$$(8 - h)^2 + k^2 = r^2. \qquad (5)$$

La solución del sistema formado por las tres ecuaciones (3), (4) y (5) con las tres incógnitas h, k y r da

$$h = 4, \quad k = -2, \quad r = 2\sqrt{5}.$$

Por tanto, la ecuación buscada es

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20.$$

El centro es el punto $(4, -2)$ y el radio es $2\sqrt{5}$. La gráfica aparece en la figura 55.

En el Artículo 35 obtuvimos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados diferentes en forma de determinante, Por un argumento semejante, podemos obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, no colineales, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, en forma de determinante. El resultado está dado por el

TEOREMA 3. *La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados no colineales* $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ *viene dada por el determinante*

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

NOTA. Esta forma es útil para determinar si cuatro puntos dados están o no sobre una circunferencia. Se dice que tales puntos son *concíclicos*.

EJERCICIOS. Grupo 16

Dibujar una figura para cada ejercicio.

En cada uno de los ejercicios 1-3, reduciendo la ecuación dada a la forma ordinaria, determinar si representa o no una circunferencia. Si la respuesta es afirmativa, hallar su centro y su radio.

1. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0.$
2. $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0.$
3. $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0.$
4. Hallar el área del círculo cuya ecuación es

$$9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0.$$

5. Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es

$$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0.$$

6. Demostrar que las circunferencias $4x^2 + 4y^2 - 16x + 12y + 13 = 0$ y $12x^2 + 12y^2 - 48x + 36y + 55 = 0$ son concéntricas.

7. Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ son tangentes.

8. Demostrar, por dos métodos, que las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0 \quad y \quad 4x^2 + 4y^2 - 40x + 8y + 79 = 0$$

no se cortan.

En cada uno de los ejercicios 9-11, determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados, usando el método del ejemplo 1, Artículo 41.

9. $(0, 0)$, $(3, 6)$, $(7, 0)$.

10. $(2, -2)$, $(-1, 4)$, $(4, 6)$.

11. $(4, -1)$, $(0, -7)$, $(-2, -3)$.

12. Resolver el ejercicio 9 por el método del ejemplo del Artículo 39.

13. Resolver el ejercicio 10 por el método del ejemplo 2, Artículo 41.

14. Resolver el ejercicio 11 usando el determinante del teorema 3, Artículo 41.

15. Por medio del teorema 3, Artículo 41, demostrar que los cuatro puntos $(-1, -1)$, $(2, 8)$, $(5, 7)$, $(7, 3)$ son concíclicos.

16. Resolver el ejercicio 15 hallando la ecuación de la circunferencia que pasa por tres cualesquiera de los puntos y demostrando después que las coordenadas del cuarto punto satisfacen esta ecuación.

17. Las ecuaciones de dos circunferencias diferentes son

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \quad y \quad x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0.$$

Hallar las condiciones que deben satisfacer los coeficientes para que sean concéntricas.

18. La ecuación de una circunferencia es $4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica que es tangente a la recta $5x - 12y = 1$.

19. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 39 = 0$$

en el punto $(4, 5)$.

20. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(11, 4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. (Dos soluciones.)

21. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, -4)$, $(2, -1)$ y cuyo centro está sobre la recta $4x + 7y + 5 = 0$.

22. Una circunferencia de radio 5 es tangente a la recta $3x - 4y - 1 = 0$ en el punto $(3, 2)$. Hallar su ecuación. (Dos soluciones.)

23. Una circunferencia de radio $\sqrt{13}$ es tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 47 = 0$$

en el punto $(6, 5)$. Hallar su ecuaeión. (Dos soluciones.)